1.3 Mathematisch deduktiver Aufbau der QM

Prinzip des QC : **mathematische Aufbau der QM** entscheidend.

John von Neumann (1903-1957)

“Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik” 1932

Gegenwärtige Anwendungen im QC: sehr einfache Mathematik: endlich Vektorräume.

Bei der Realisierung: Physik W. Heisenberg

“Die Physikalischen Prinzipien de Quantentheorie” 1928

Immer noch im Fluss!!

1 Ein **isolierter** (oder auch reiner) **Zustand** wird in der QP durch einen **normierten Vektor aus einem Hilbertraum**, $|\psi\rangle$ beschrieben.

Allgemein wird ein Zustand durch einen **nicht-negativen, selbstadjungierten Operator ρ der trace-class** im Hilbertraum beschrieben;

es gilt: $\boldsymbol{\rho}^\dagger = \boldsymbol{\rho}$; Eigenwerte ≥ 0, $\mathrm{Tr}\boldsymbol{\rho} = 1$.

Dieser Operator heisst "**Dichtematrix**" oder **"statistischer Operator"** .

2 **Observable** sind Eigenschaften eines physikalischen Systems, die im Prinzip beobachtet werden können. In der Quantenphysik werden Observable durch selbstadjungierter lineare Operatoren Hilbertraum der Zustände beschrieben. Die möglichen Messwerte sind eigenwerte dieser Operatoren.

Das wichtigste Prinzip zur Konstruktion von Observablen in der Quantenphysik: **Korrespondenzprinzip**, s. Anm. zu 2:

3 Bei einer **Messung** der Observablen **A** an einem reinen Zustand $|\phi\rangle$ geht dieser in einen Eigenzustand der Observablen **A**, nämlich $|A_n\rangle$ über. $|\phi\rangle \to |A_n\rangle$ (Reduktion der Wellenfunktion).

Das Ergebnis der Messung ist der Eigenwert A_n Die *a priori* Wahrscheinlichkeit bei einer Messung diesen Wert A_n zu erhalten ist $|\langle A_n|\phi\rangle|^2$.

Ein Dichteoperator $\boldsymbol{\rho}$ geht bei einer Messung in einen Projektionsoperator auf einen Eigenzustand von **A** über, $\boldsymbol{\rho} \to |A_n\rangle\langle A_n|$. Die Wahrscheinlichkeit den Messwert A_n zu erhalten ist $Tr\left(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\rho}\right)$.

4 Die **zeitliche Entwicklung** (Dynamik) eines Systems von der Zeit t bis t' wird durch einen unitären Operator $\mathbf{U}(t,t') = e^{i(t'-t)\mathbf{H}/\hbar}$ beschrieben.Der selbstadjungierte Operator **H** heisst der Hamiltonoperator des Systems, er ist der Operator für die Observable Energie.

Hamiltonoperator aus Korrespondenzprinzip (oder Erweiterung)

Anmerkungen Zu 1:

Zusammengesetzte Systeme aus den Hilberträumen $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ sind Vektoren aus dem Produktraum $\mathcal{H}_A \otimes cH_B$. Im QC besondere Rolle, HR im QC direktes Produkt $\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2 \otimes \cdots$.

Isoliertes System in der Quantenmechanik ist eine Idealisierung.

Fundamentales Konzept: statistischer Operator,

beschreibt Gemisch, mit reinem Zustand als Spezialfall, s. nächster Abschnitt

Zu 2: Observable der QM aus klassischen Grössen .

Korrespondenzprinzip: Observablen-Operatoren der Quantenphysik aus Beobachtungsgrössen klassischen Physik.

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Besonders wichtig in klassischer Physik: Zustandsvariable für Ort und Impuls, q_j, p_k *to* Operatoren in QM.

$$q_j \to \mathbf{Q}_j;\ p_k \to \mathbf{P}_k \tag{1}$$

Orts- und Impulsoperatoren der Quantenmechanik erfüllen Vertauschungsrelationen $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$:

$$[\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_k] = 0; \quad [\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_k] = 0; \quad [\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_k] = -i\hbar\,\delta_{kl} \tag{2}$$

In der Ortsraum-Darstellung, d.h. wenn der Hilbertraum der Orts-Anteil des Phasenraums ist, gilt für ein Teichen $\mathcal{L}_2(R^3) \ni \vec{x}$:

$$P_k = -i\hbar\partial_k \tag{3}$$

Dann (2) erfüllt.

Beispiel:

Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m_e}\vec{\mathbf{P}}_e^{\,2} + \frac{1}{2m_p}\vec{\mathbf{P}}_p^{\,2} + \frac{e^2}{|\vec{\mathbf{Q}}_e - \vec{\mathbf{Q}}_p|} \tag{4}$$

Die Indices $_e$ und $_p$ beziehen sich auf das Elektron bzw. Proton.

Wie bereits erwähnt, hat bei einem Mehrteilchenproblem jedes Teilchen "seinen eigenen Hilbertraum" und der Hilbertraum für das Gesamte System ist das direkte Produkt der Hilberträume.

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Der im Korrespondenzprinzip auftretende klassische Impuls $p_k \to \mathbf{Q}_k$:
kanonischer Impuls $p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \mathcal{L}(\dot{q}, q)$ (Euler-Lagrange)
Konsequenzen bei Anwesenheit eines e.m. Feldes und bei der Erweiterung der Quanten**mechanik** zur Quanten**feldtheorie**

Klassische Physik	Quantenphysik
Poisson-Kl. $\to$	Kommutator
Feldtheorie $\to$	Quantenfeldtheorie
	$\downarrow$
Mechanik $\to$	Quantenmechanik

Zu 3

Der Messprozess in der QM ist das umstrittenste Prinzip:

Formalisierung von Axiom 3 zum Messprozess :

Die Observable $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \quad \rightarrow \; \exists$: Spektralzerlegung: s. (**??**):

$$\mathbf{A} = \sum_n A_n \, \mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_n = |A_n\rangle\langle A_n|; \quad \mathbf{A}|A_n\rangle = A_n|A_n\rangle \tag{5}$$

Bei der Messung von $\mathbf{A}$ am Zustand $|\phi\rangle$ wird mit der Wahrscheinlichkeit

$$p(n) = \langle\phi|\mathbf{P}_n^\dagger \mathbf{P}_n \phi\rangle = \Big||\mathbf{P}_n\phi\rangle\Big|^2 \tag{6}$$

das Ergebnis A_n erhalten.

Nach der Messung mit dem Ergebnis A_n: System im (normierten) Zustand

$$|A_n\rangle = |\mathbf{P}_n \, \phi\rangle / \Big| \, |\mathbf{P}_n\phi\rangle \, \Big| \tag{7}$$

.

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Für viele realisierbaren Messungen ist das Mess-axiom in der Form 4 nicht erfüllt. Bei Messungen von Photonen überlebt das Photon den Messprozess i.A. nicht. Im Photomultiplier werden sie z. B. dadurch nachgewiesen, dass sie absorbiert werden. Erst durch die Präzisionsmessungen von Laroche (Nobelpreis 2012) konnten Photonen "zerstörungsfrei" nachgewiesen werden.

Der Messprozess spielt auch im QC eine wichtige Rolle, deswegen wird hier eine etwas weitergefasste Versionen des Messaxioms 3 beschrieben (s. z.B. NC, p.84ff).

Für die quantitative probabilistische Interpretation der Messung, d.h. die Nachweiswahrscheinlichkeit $p(n)$ ist nur das Produkt $\mathbf{P}_n^\dagger \mathbf{P}_n$ nötig, s. (6) ; Einzeloperator $\mathbf{P}_n$ nur zur Bestimmung des Endzustandes.

Verzichtet man auf diese Information, so reicht das Produkt $\mathbf{P}_n^\dagger \mathbf{P}_n$ aus.

Dies führt zu einer weiteren Fassung, dem POVM- Mess-Axiom:

POVM (Positive, operatorvalued measure) Seien $\mathbf{V}_m$ positive Operatoren mit $\sum_m \mathbf{V}_m = 1$, ,,operatorwertige Masse''. Der Messwert für einen Zustand $|\phi\rangle$ nimmt einen durch m indizierten Wert mit der Wahrscheinlichkeit

$$p(m) = \langle\phi|\mathbf{V}_m\phi\rangle \text{ an} \tag{8}$$

Wir können uns die Ansammlung der Projektionsoperatoren $\mathbf{P}_k = |\Psi_k\rangle\langle\psi_k|$ aus Axiom 3 oder die der Operatorwertigen Masse V_m als ein Spektrometer vorstellen das den zu messenden Zustand nach gewissen vorgegebenen Werten sortiert.

Verallgemeinerung gilt auc für solche Messprozesse, bei denen der gemessene Zustand nach der Messung überhaupt nicht mehr vorhanden ist z.B. beim Nachweis eines Photons .

Bei Messung an Superposition geht Information die über die Phasen unweigerlich verloren:

$|\phi\rangle = \sum_n \alpha_n |A_n\rangle \xrightarrow{\text{Einzelmessung}} |\alpha_j|^2 \in \mathcal{R}$ **nicht** $\alpha_n \in \mathcal{C}$

Realisierung einer QM Messung: Es muss nicht unbedingt eine Physikerin ein Messgerät aufgebaut haben, auch Wechselwirkung mit der Umgebung kann ein (effektiver) Messprozess sein.

Der Verlust an Information über die Phasen der Komponenten (Dekohärenz) ist also ein allgemeiner und schwer zu verhindernder Vorgang (s. später).

Zu 4 Für die Zeitabhängigkeit eines isolierten (reinen) Zustand $\in \mathcal{H}$ gilt

$$|\phi(t)\rangle = |\mathbf{U}(t-t_0)\phi(t_0)\rangle \tag{9}$$

Für den entsprechenden Operator

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(t) &= |\mathbf{U}(t-t_0)\phi(t_0)\rangle\langle\phi(t_0)\mathbf{U}^\dagger(t-t_0)| && (10) \\ &= \mathbf{U}(t-t_0)\boldsymbol{\rho}(t_0)\mathbf{U}^\dagger(t-t_0) && (11) \end{aligned}$$

Schrödingerbild: Zustände zeitabhängig, Observable zeitunabhängig

Heisenbergbild: Zustände zeitunabhängig, Observable zeitabhängig

im QC i.A. Heisenbergbild

1.3.2 Der statistische Operator

Ein isoliertes System in der Quantenmechanik ist eine Idealisierung, in der Realität wird ein System stets mit der Umwelt in Kontakt sein. Dies gilt besonders für makroskopische Systeme, wie z.B. eine Katze. Hier liegen die einzelnen Zustände des Systems so nahe beisammen, dass schon die kleinste Wirkung von aussen das System beeinflusst (z.B. Gravitationswellen).

Aber: Jedes System kann im Prinzip durch einen statistischen Operator mit bestimmten Eigenschaften beschrieben werden.

2 Systeme, A und B möglicherweise in Wechselwirkung, aber zusammengefasst isoliert sein sollen: Zustände in $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$: reine Zustände

$|f_n\rangle \cdots \in \mathcal{H}_A$ und $|g_\mu\rangle \cdots \mathcal{H}_B$ voS in $\mathcal{H}_A$ bzw. $\mathcal{H}_B$

Jeder (reine) Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\nu} a_{n\mu}|f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_{n,\nu} \|a_{n\mu}\|^2 = 1 \tag{12}$$

Wir wollen nun im System A die Observable $\mathbf{M}_A$ messen, aber das System B nicht beachten.

Dann beobachten wir effektiv die Observable $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B$

Der Erwartungswert dieser Observablen für ein beliebiges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ ist:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{M}_A \rangle &= \langle \psi | \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B | \psi \rangle; \text{ mit } \quad |\psi\rangle = \sum_{n,\nu} a_{n\mu} |f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle \\
&= \left(\sum_{n,\nu} a^*_{n\nu} \, \langle f_n | \otimes \; {}_B\langle g_\nu | \right) \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B \left(\sum_{m,\mu} a_{m\mu} \, |f_m\rangle \otimes |g_\mu\rangle_B \right) \\
&= \sum_{m,n,\mu,\nu} a^*_{n\nu} \, a_{m\mu} \langle f_n | \mathbf{M}_A | f_m \rangle \, \delta_{\nu\mu} \\
&= \sum_{m,n,\mu} \underbrace{a^*_{n\mu} \, a_{m\mu} \underbrace{\langle f_m | f_m \rangle}_{1}} \langle f_n | \mathbf{M}_A | f_m \rangle \\
&= \sum_{m} \langle f_m | \underbrace{\sum_{n,\mu} a^*_{n\mu} \, a_{m\mu} | f_m \rangle \langle f_n |}_{\boldsymbol{\rho}_A} \mathbf{M}_A | f_m \rangle \\
&= \mathrm{Tr}_A(\boldsymbol{\rho}_A \cdot \mathbf{M}_A); \quad \boldsymbol{\rho}_A \equiv \sum_{n,m,\mu} a^*_{n\mu} \, a_{m\mu} \, |f_m\rangle\langle f_n|; \qquad (13)
\end{aligned}
$$

in Komponenten

$$\left(\boldsymbol{\rho}_A\right)_{mn} = \langle f_m | \boldsymbol{\rho}_A f_n \rangle = \sum_{\mu} a^*_{n\mu}\, a_{m\mu} \tag{14}$$

Aus der Definition von $\boldsymbol{\rho}_A$ (**??**) folgen die wichtigen Eigenschaften:

(A) $\quad \boldsymbol{\rho}_A^\dagger = \boldsymbol{\rho}_A$

(B) $\quad \forall \phi \in \mathcal{H}_A : \quad \langle \phi || \boldsymbol{\rho}_a\, \phi \rangle \geq 0$

(C) $\quad \mathrm{Tr} \quad \boldsymbol{\rho}_A = 1$

Damit haben wir auch gesehen, dass die Beschreibung eines Zustandes durch den statistischen Operator auch gültig ist, wenn ein System mit einem anderen (äusseren) in Verbindung steht, dessen ähere Eigenschaften uns aber nicht interessieren (z.B. Wärmebad).
Dies ist im folgenden Satz zusammengefasst

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\nu} a_{n\mu} |f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle$$

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B$$

Messung der Observablen **M** in $\mathcal{H}_A$, "ignoriere" $\mathcal{H}_B$

$$\mathcal{H}_A$$

$$\left(\rho_A\right)_{mn} = \langle f_m | \rho_A f_n \rangle = \sum_\mu a^*_{n\mu}\, a_{m\mu}$$

[redacted]

(A) $\rho_A^\dagger = \rho_A$

(B) $\forall \phi \in \mathcal{H}_A: \quad \langle \phi || \rho_a \phi \rangle \geq 0$

(C) $\mathrm{Tr} \quad \rho_A = 1$

Ein Zustand aus einem HR $\mathcal{H}_A$ wird durch einen Operator $\boldsymbol{\rho}_A$ mit den obigen Eigenschaften (**A** - **C**) beschrieben, auch wenn er nicht isoliert ist. Der Erwartungswert für eine Observable $\mathbf{M}_A$ ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{M}_A \rangle = Tr\left(\rho_A \cdot \mathbf{M}_A\right) \tag{15}$$

Ist der Hamiltonoperator für die Zustände im gemeinsamen Hilbertraum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ gegeben durch $\mathbf{H}_A \otimes \mathbf{H}_B$ so ist die zeitliche Entwicklung von $\boldsymbol{\rho}$ gegeben durch,

$$\boldsymbol{\rho}_A(t) = e^{-i\mathbf{H}_A t}\boldsymbol{\rho}_A e^{i\mathbf{H_A} t} \tag{15}$$

Daraus folgt das Analog zur Schrödingergleichung, s. **??** :

$$i\hbar\partial_t\boldsymbol{\rho}_A(t) = [\mathbf{H}_A, \boldsymbol{\rho}_A(t)] \tag{16}$$

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Auch ein reiner Zustand $|\psi\rangle$, $||\psi\rangle| = 1$ wird durch einen statistischen Operator beschrieben: Projektionsoperator auf diesen Zustand.

$$\boldsymbol{\rho} = P_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi| \tag{17}$$

Bew:

$$\text{Allgemein} \quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{M}) = \sum_j \langle g_j|\boldsymbol{\rho}\mathbf{M} g_j\rangle \quad \text{hier} \quad \sum_j \langle g_j|\psi\rangle\langle\psi|\,\mathbf{M}|g_j\rangle \tag{18}$$

Wir wählen das voS $\{\ldots|g_j\rangle\ldots\}$ so, dass ein Vektor $|g_n\rangle = |\psi\rangle$ ist damit erhalten wir

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{M}) = \sum_j \underbrace{\langle g_j|\psi\rangle}_{\delta_{jn}}\langle\psi|\mathbf{M}\psi\rangle = \langle\psi|\mathbf{M}\psi\rangle \tag{19}$$

d.h. der übliche Erwartungswert für den reinen Zustand.

Diagonale Dichtematrix:

Statistische Operator $\boldsymbol{\rho}$ selbsadjungiert $\rightarrow \exists$ voS $\{\ldots|f_n\rangle\ldots\}$ mit

$$\langle f_j|\boldsymbol{\rho} f_k\rangle = p_k\delta_{jk} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_j p_j\,\mathbf{P}_{f_j} \tag{21}$$

d.h. der durch $\boldsymbol{\rho}$ beschriebene Zustand ist ein **Ensemble** von Zuständen , die sich mit der Wahrscheinlichkeit p_n im Zustand $|f_n\rangle$ befinden.

zwischen den Zuständen eines gemischs gibt es keine Phasenbeziehungen (präziser: über die Phasenbeziehungen können wir keine Aussagen machen).

Beispiele: Spin $\frac{1}{2}$:

reine Zustände Spinoren in feste Richtung:

$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein allgemeiner Zustand: unpolarisiertes Gemisch von $+$ und $-$ Zuständen.

statistischen Operator $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Der statistische Operator für den reinen Zustand $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, der Projektionsoperator auf den Zustand χ_-.

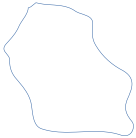
1.3 Mathematisch deduktive QM.

Besonders wichtig ist der statistische Operator in der Quantenstatistik (Statistische Thermodynamik, auch in Festkörperphysik) .
Hier wird das System aufgespalten in ein Wärmebad der Tempratur T und das untersuchte System, z. B. Gasmoleküle in einem festen Volumen) .
Der statistische Operator ist bei fester Temperatur T (kanonisches Ensemble) durch den Hamiltonoperator (Energie-Operator) **H** gegeben:

$$\boldsymbol{\rho} = \exp[-\mathbf{H}/(k_B T)]/Z \tag{22}$$

k_B ist die Boltzmannkonstante, $Z = Tr \exp[-\mathbf{H}/(k_B T)]$, ist die "Zustandssumme".

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Klassische Physik		Quantenmechanik	
Gemisch	reiner Zustand	Gemisch	reiner Zustand
$\rho(p,q)$	$\delta(p-p_0)$	$\boldsymbol{\rho}=\sum_j \lvert\phi_j\rangle\langle\phi_j\rvert$	$\lvert\phi\rangle$
	$\bullet$ dispersionsfrei		$\Delta p\, \Delta q \geq \hbar$

In der klassischen statistischen Mechanik entspricht dem statistischen Operator eine (ausgedehnte) Verteilungsfunktion im Phasenraum, dem reinen Zustand dagegen eine δ-Funktion am Punkt $(\ldots q_k^0 \ldots p_k^0 \ldots)$ im Phasenraum: $\prod_k \delta(q_k - q_k^0)\delta(q_k - p_k^0)$

Besonderheit der QM: Rein ist nicht dispersionsfrei!

1.3.3.1 Verschränkung

Das Superpositionsprinzip zusammen mit der Produktdarstellung von Hilberträumen kann zu “burlesken” Folgen führen, wie Schrödinger schon früh feststellte, s. 1.2. Die weniger burlesken Folgen werden uns während der ganzen Vorlesung begleiten, denn die **Verschränkung** (*entanglement*) ist ein Grundpfeiler des QC.

Der Begriff der Verschränkung ist mathematisch denkbar einfach:
Sei ein Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
Ein Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ der sich **nicht** als Produkt von zwei Elementen der beiden Faktorräume darstellen darstellen lässt, $|\psi\rangle \neq |\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ heisst ein beschränkter Zustand.

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Verschränkung ist kein absoluter Begriff, sondern bezieht sich stets auf eine bestimmte Aufteilung.

Seien $|\psi\rangle_A$ und $|\phi\rangle_A$, sowie $|\chi\rangle_B$ und $|\eta\rangle_B$ orthogonale Elemente aus $\mathcal{H}_A$ bzw. $\mathcal{H}_B$, d.h. $\langle\psi|\phi\rangle = 0, \langle\chi|\eta\rangle = 0$ dann ist:

$$\begin{aligned} |\Psi_v\rangle &= |\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B + |\phi\rangle_A \otimes |\eta\rangle_B \text{ ein } \textbf{verschränkter Zustand} \\ |\Psi_{nv}\rangle &= |\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B \quad \textbf{kein} \text{ verschränkter Zustand} \end{aligned}$$

Das Besondere bei der Verschränkung :Messprozess

$$|\Psi_v\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B + |\phi\rangle_A \otimes |\eta\rangle_B \tag{23}$$

Messung in $\mathcal{H}_A$ ergebe ψ, d.h. Reduktion auf $_A\langle\psi|\Psi_v\rangle \rightarrow |\chi\rangle_B$.
In QC Sprache:
Misst Alice dass das System im Zustand $|\psi\rangle_A$ ist, so misst Bob $|\phi\rangle_B$, misst aber Alice $|\chi\rangle_A$, dann Bob $|\eta\rangle_B$, da die beiden Zustände verschränkt sind.
Grund für EPR: Wenn Bob sicher χ misst, muss das System mit Sicherheit auch diese Eigenschaft haben.

1.3.3.2 Dekohärenz

Die Konsequenz der Verschränkung beim Messprozess war genau dass, was Einstein so sehr gestört hat.
EPR argumentieren: Wenn es **sicher** ist, dass Bob $|\psi\rangle_B$ misst, wenn Alice $|\psi\rangle_A$ gemessen hat, dann muss das System B doch diese Eigenschaft haben, unabhängig davon, was Alice gemessen hat.
Aber nach QM: Hätte Alice keine Messung vorgenommen, so wäre der Ausgang für Bob tatsächlich offen gewesen.
Warum stört dies unser Anschauungsvermögen?

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Meiner **Meinung** nach ist die Antwort eine alte Weisheit:
Was der Bauer nicht kennt, frisst er nicht
Vielleicht erinnere Sie ich auch noch an manches Phänomen, dass Ihnen beim ersten Mal als unbegreiflich erschien.
Ich erinnere mich noch genau daran, wie mir vor etwa 80 Jahren die Tatsache, dass Wasser über einen Berg laufen kann, nämlich im Saugheber , unerklärlich erschien. Nach den erfolglosen Versuchen damit ein perpetuum mobile zu konstruieren – um damit mein Dreirad anzutreiben – habe ich mich aber daran gewöhnt.

Warum sind wir aber nicht an die Verschränkung gewöhnt ?? Wie das Beispiel von Schrödingers Katze gezeigt hat, müsste im Prinzip doch auch eine Überlagerung, und damit auch eine Verschränkung makroskopischer Körper möglich sein.

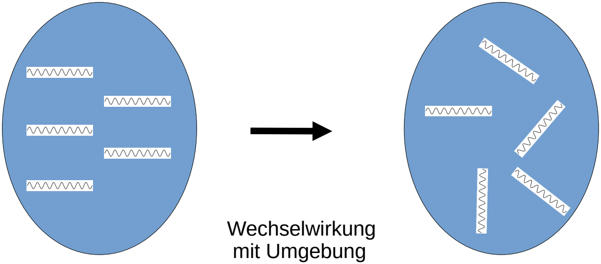
1.3 Mathematisch deduktive QM.

Wie bereits beim Messprozess erwähnt gehen durch die Wechselwirkung mit der Umwelt (das sind effektiv Messungen) die Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten einer Überlagerung verloren und wir landen nach einer gewissen Zeit bei einem Gemisch.
Da bei makroskopischen Körpern die Quantenzustände so kleine Energiedifferenzen haben, können schon winzige Energiemengen, z.B. von der Gravitationsstrahlung zu effektiven "Messungen" führen und damit zum Verlust der Phasenbeziehungen. Die Bedeutung der Quasi-Unvermeidlichkeit des Verlustes von Phasenbeziehungen bei makroskopischen Zuständen wurde zuerst klar von dem Heidelberger Physiker H. D. Zeh erkannt und "**Dekohärenz**" genannt (1970).

Baby-Reifeprüfung' erfolgreich bestanden

MIT GROSSEM AUFWAND feierten die Studenten am Samstagvormittag zwei Habilitanden als „Fakultäts-Babies". Punkt zehn Uhr erschienen Hans Dieter Z e h (Institut

H. Dieter Zeh (1932-2018)



$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & |\alpha_2|^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & |\alpha_3|^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \end{pmatrix}$$

Kohärente Überlagerung:
Vektor im Hilbertraum

Mischung:
statistischer Operator

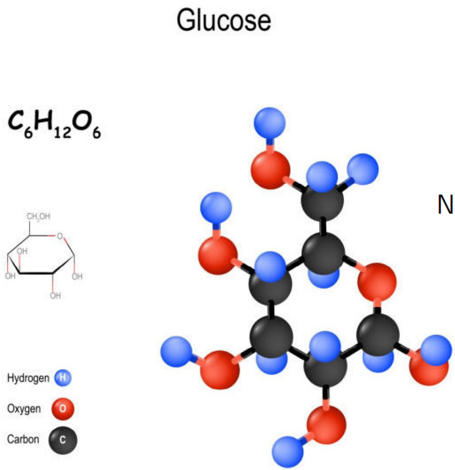
Abbildung: Durch die Wechselwirkung mit der Umgebung kann die Kohärenz einer Überlagerung verloren gehen, sie wird i. A. zu einem Gemisch. Bei makroskopischen Körpern reicht schon die Wechselwirkung mit der kosmischen Hintergrundstrahlung aus.

1.3 Mathematisch deduktive QM.

Bei makroskopischen Körpern ist die Wechselwirkung mit der Umgebung so stark, dass die "Kohärenzzeit" im Sub-Nanosekunden Bereich liegt. Deshalb hat noch niemand die (kohärente) Überlagerumg einer wachen und schlafenden Katze beobachtet. Selbst bei Objekten mikroskopischen Ausmasses ist kann eine Verschränkung unrealistisch sein.

Bsp. Glukose. Existiert in linkssymmetrischer und rechtssymmetrischer Form, $|L\rangle$, $|D\rangle$ Isomere Formen.
Haben beide die gleiche Energie: Allg. Prinzipien der QM $\Rightarrow$ Antisymmetrische Überlagerung $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|D\rangle - |L\rangle\Big)$ müsste etwas leichter und damit stabil sein, totzdem nur $|R\rangle$ in Natur.

1.3 Mathematisch deduktive QM.

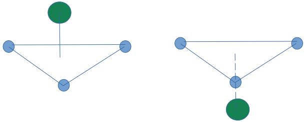


$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|D\rangle + |L\rangle\Big)$$
$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|D\rangle - |L\rangle\Big)$$

$|D\rangle$ oszilliert in $|L\rangle$ und zurück oder zerfällt in $|A\rangle$

Nicht beobachtet!! Grund Dekohärenz

Aber beobachtet bei einfachen Systemen: NH_3 Maser



Übergangszeit von $|R\rangle \to |L\rangle$ so lang, dass vorher Dekohärenz stattfindet, daher $|R\rangle$ stabil. (Watchdog effekt, s. 1.4)

Die Schmidt Darstellung

Die Schmidt Darstellung gibt ein Mass für die Verschränkung eines Zustandes.

Erhard Schmidt (1876-1959)

Seien $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$ zwei Hilberträume.

Im folgenden gilt stets, wie in 1.3.2:

$|$latein. Index $\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|$griech. Index$\rangle \in \mathcal{H}_B$.

Ein Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ kann durch die voS $\{|f_n\rangle\} \in \mathcal{H}_A$ und $\{|g_\mu\rangle\} \in \mathcal{H}_B$ dargestellt werden .

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{M} a_{n\mu} |f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle = \sum_{n=0}^{N} \ |f_n\rangle \otimes \left(\sum_{\mu=0}^{M} a_{n\mu} |g_\mu\rangle_B \right) \tag{24}$$

Wir können einen Zustand durch diesen Vektor aus $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ oder genauso durch den Projektionsoperator $\mathbf{P}_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ beschreiben. Wir hatten in 1.3.2, (13) gesehen, dass bei Messungen im HR $\mathcal{H}_A$ die Kenntnis des statistischen Operators $\boldsymbol{\rho}_A$ ausreicht, um Erwartungswerte von Operatoren $\mathcal{M}$, die in $\mathcal{H}_A$ wirken, zu berechnen. Wir wiederholen kurz die Argumentation aus einem etwas verschiedenen Blickwinkel, nämlich dem der Verschränkung.

Schmidt Darstellung:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\nu} a_{n\mu} |f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle$$

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B$$

$$\mathcal{H}_A$$

$$\left(\rho_A\right)_{mn} = \langle f_m | \rho_A f_n \rangle = \sum_\mu a^*_{n\mu}\, a_{m\mu}$$

[redacted]

(A) $\rho_A^\dagger = \rho_A$

(B) $\forall \phi \in \mathcal{H}_A: \quad \langle \phi || \rho_a \phi \rangle \geq 0$

(C) $\mathrm{Tr} \quad \rho_A = 1$

$$\rho_A^D = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \sum_j^{N_{Sch}} \sqrt{p_j}\, |\tilde{h}_j\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle$$

Der Zustand ist nicht verschränkt, wenn in ein Produkt zweier Vektoren, $|\tilde{h}\rangle \in \mathcal{H}_A$ und $|\tilde{e}\rangle \in \mathcal{H}_B$ zerlegt werden kann.
Ist dies nicht möglich, sind also zumindest zwei linear unabhängige Summanden nötig, d.h.

$$|\psi\rangle = \sum_{j,\kappa}^{2} a_{j\kappa} |\tilde{h}_j\rangle \otimes |\tilde{r}_\kappa\rangle \tag{25}$$

nötig, so ist der Zustand **verschränkt bezüglich der Aufteilung in $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$**
Wir starten wieder mit der Partialspur in $\mathcal{H}_B$.

Der Projektionsoperator für den Zustand $ket\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, s. (24)
$|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{n,n',\mu,\mu'} a^*_{n'\mu'}\, a_{n\mu}\Big(|f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle\Big)\Big(\langle f_{n'}| \otimes \langle g_{\mu'}|\Big)$
hat die Partialspur in $\mathcal{H}_B$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_A &\equiv \sum_\nu \langle g_\nu|\psi\rangle\langle\psi|g_\nu\rangle & (26)\\ &= \sum_{n,n',\mu,\mu',\nu} a_{n\mu}\, a^*_{n'\mu'} \langle g_\nu|g_\mu\rangle\langle g_{\mu'}|g_\nu\rangle\, |f_n\rangle\langle f'_n| & (27)\\ &= \sum_{nn'} (\rho_A)_{nn'}|f_n\rangle\langle f_{n'}|; & (28)\end{aligned}$$

mit der $N \times N$ matrix

$$(\rho_A)_{nn'} = \langle f_n|\boldsymbol{\rho}_A f_{n'}\rangle = \sum_\nu a_{n\nu}\, a^*_{n'\nu}\ , \tag{29}$$

die Zahlen $a_{n\nu}$ sind die Entwicklungskoeffizienten aus (24)
Die Matrix $\boldsymbol{\rho}_A = \{(\rho_A)_{nn'}\} = \{(\rho_A)*_{n'n}\}$ ist selbstadjungiert, wie man leicht sieht.

$$\mathbf{U}\,\boldsymbol{\rho}_A\,\mathbf{U}^\dagger = \boldsymbol{\rho}_A^D = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \end{pmatrix} \tag{30}$$

bzw.

$$\sum_{nn'} U_{jn}(\rho_A)nn' U^*_{kn'} = (\rho_A)^D_{jk} = p_k\,\delta_{jk}; \quad p_k \geq 0; \tag{31}$$

Die Zahl der von Null verschiedenen Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{\rho}_A$ heisst **Schmidt-Zahl**, N_{Sch}; sie spielt für die Berechnung der Verschränkung, wie wir noch sehen werden, eine entscheidende Rolle.

Umgekehrt gilt:

$$\mathbf{U}^\dagger \boldsymbol{\rho}_A^D\,\mathbf{U} = \mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad U^*_{jn}({\rho_A}^D)_{jk} U_{kn'} = (\rho_A)_{nn'} \tag{32}$$

Erinnerung: $\mathbf{U}\,\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\,\mathbf{U} = \mathbf{I}$; $\quad \sum_m U^*_{mr}\,U_{ms} = \delta_{rs}$

Wir schreiben mit (32) den Operator $\boldsymbol{\rho}_A$ aus (26) um:

$$\boldsymbol{\rho}_A = \sum_{nn'} \mathbf{U}^\dagger \boldsymbol{\rho}_A^D \mathbf{U} |f_n\rangle\langle f_{n'}| = \sum_{n,n',kj} \underbrace{U^*_{jn}|f_n\rangle}_{|\tilde{h}_j\rangle} (\rho_A^D)_{jk} \underbrace{U_{kn'}\langle f_{n'}|}_{|\tilde{h}_k\rangle} \tag{33}$$

$$= \sum_{k,j}^{N_{Sch}} |\tilde{h}_j\rangle\, p_k\, \delta_{jk} \langle \tilde{h}_j| = \sum_{k}^{N_{Sch}} p_k\, |\tilde{h}_k\rangle\, \langle \tilde{h}_k| \tag{34}$$

mit dem neuen orthogonalen Vektoren

$$|\tilde{h}_j\rangle = \sum_{n}^{N} U^*_{jn} |\tilde{f}_n\rangle,\ j = 1 \dots N_{Sch}; \tag{35}$$

Um den Vektor $|\psi\rangle$, s. (24) zu konstruieren reichen N_{Sch} Vektoren aus, denn aus der Unitarität von $\mathbf{U}$ folgt:

$$\sum_{j}^{N_{Sch}} U_{jn} |\tilde{h}_j\rangle = \sum_{j}^{N_{Sch}} U_{jn} \sum_{n'}^{N} U^*_{jn'} |\tilde{f}_{n'}\rangle = |\tilde{f}_n\rangle,\ n = 1 \dots N; \tag{36}$$

Wenn $N_{Sch} < N$ dann sind die für die Konstruktion von $|ps\rangle$ nötigen Vektoren aus $\mathcal{H}$ nicht linear unabhängig.

Nun gehen wir zu (24) zurück und ersetzen $\{|f_n\rangle\} \to \sum_j^{N_{Sch}} U_{jn}|\tilde{h}_j\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N}\sum_{\mu=0}^{M} a_{n\mu}|f_n\rangle \otimes |g_\mu\rangle \sum_{n,j,\mu} |\tilde{h}_j\rangle \otimes |g_\mu\rangle a_{n\mu} U_{jn} \tag{37}$$

$$= \sum_{j}^{N_{Sch}} |\tilde{h}_j\rangle \otimes |e_\kappa\rangle \;\text{ mit }\; |e_j\rangle = \sum_{\mu}^{M}\sum_{n}^{N} a_{n\mu} U_{jn}|g_\mu\rangle,\; j = 1,\dots N_{Sch}$$

Beachte: $|e_j\rangle \in \mathcal{H}_B$.

Es gilt:

$$\langle e_{j'}|e_j\rangle = \langle g_{\mu'}|g_\mu\rangle U^*_{j'n'} a^*_{n'\mu'} a_{n\mu} U_{jn} = U_{jn}(\rho_A)_{nn'} U^*_{j'n'} = p_\kappa\, \delta_{jj'} \tag{38}$$

d.h. die $|e_j\rangle$ sind orthogonal.

Wir normieren sie durch $|\tilde{e}_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}}|e_j\rangle$

und kommen damit zur endgültigen Form der Schmidt Darstellung:

$$|\psi\rangle = \sum_{j}^{N_{Sch}} \sqrt{p_j}\, |\tilde{h}_j\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle \tag{39}$$

wobei $|\tilde{h}_j\rangle \in \mathcal{H}_A$ und $|\tilde{e}_j\rangle \in \mathcal{H}_B$ Ortonormalsysteme (aber nicht vollständig) sind.

Ist ein Zustand verschränkt, dann wird er durch eine Messung in einem der beiden Hilberträume irreversibel verändert, auch wenn sich am anderen nichts geändert hat.

Bew. Sei $|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N_{Sch}} \sqrt{p}\,|\tilde{h}k\rangle \otimes |\tilde{e}_k\rangle \in \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_B$ mit $N_{Sch} \geq 1$.
Eine Messung in $\mathcal{H}_B$ ist eine Projektion auf einen Vektor $|\rho\rangle \in \mathcal{H}_B$,:

$$|\psi\rangle_{AB} \quad \overrightarrow{Messung\ in\, \mathcal{H}_B} \quad \sum_k^{N_{Sch}} \sqrt{p_k}\,|\tilde{h}_k\rangle \otimes \Big(|\rho\rangle\langle\rho|\tilde{e}_k\rangle\Big) \tag{40}$$

$$= \left(\sum_k^{N_{Sch}} \sqrt{p_k}\;|\tilde{h}_k\rangle\langle\rho|\tilde{e}_k\rangle\right) \otimes |\rho\rangle$$

$$= |r\rangle \otimes |\rho\rangle \tag{41}$$

mit dem Zustand $|r\rangle = \sum_k^{N_{Sch}} \sqrt{p_k}\;\langle\rho|\tilde{e}_k\rangle\;|f\,\tilde{h}_k\rangle \in \mathcal{H}_A$.
nicht nur Anderung in $\mathcal{H}_B$ zu $|\rho\rangle$, sondern auch in $\mathcal{H}_A$
Kohärente Überlagerung in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_B$ geht über in Produktzustand $|r\rangle \otimes |\rho\rangle$

Purifizierung

Verwandlung eines statistischer Operators in reinen Zustand.

$\boldsymbol{\rho}$ wirkt in $\mathcal{H}_A \longrightarrow |W\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\mathrm{Tr}_B |W\rangle\langle W| = \boldsymbol{\rho}$.

Konstruktion:

Gegeben der statistische Operator $\boldsymbol{\rho}$ mit N_A Eigenwerten $p_k \neq 0$.

Wähle die Eigenvektoren $|\tilde{h}_k\rangle$ als Basis, d.h. $\boldsymbol{\rho} = \sum_k p_k \, |\tilde{h}_k\rangle\langle\tilde{h}_k|$

Wähle Zusatzraum $\mathcal{H}_B$ mit der Dimension N_A und in diesem ein Orthonormalsystem $\{|\tilde{e}_k\rangle\}$

Behauptung:

$$|W\rangle = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{p_k}\, |\tilde{h}_k\rangle \otimes |\tilde{e}_k\rangle \tag{42}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_B |W\rangle\langle W| &= \sum_{\nu}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{N} \sqrt{p_k}\, |\tilde{h}_k\rangle \otimes \langle g_\nu|\tilde{e}_k\rangle \Big) && (43)\\
&\qquad \otimes \Big(\sum_{k'=1}^{N} \sqrt{p'_k}\, \langle\tilde{h}_{k'}| \otimes \langle\tilde{e}_{k'}|g_\nu\rangle \Big) && (44)\\
&= \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k,k'=1}^{N} \sqrt{p_k\, p_{k'}}\, \delta_{k'\nu}\ \delta_{\nu k}\, |\tilde{h}_k\rangle\langle\tilde{h}_{k'}| && (45)\\
&= \sum_{k=1}^{N} p_k\, |\tilde{h}_k\rangle\langle\tilde{h}_k| && (46)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Vertrautes Beispiel

Spin 0 aus 2 Spin $\frac{1}{2}$ Zuständen :

$$|J=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle - |10\rangle\Big) \quad (47)$$

Umständlich geschrieben:

$$\begin{aligned} |J=0\rangle \quad = \quad & \Big(a_{11}|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + a_{12}|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B & (48) \\ & + a_{21}|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + a_{22}|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B\Big) & (49) \end{aligned}$$

mit $a_{11} = a_{22} = 0;\; a_{12} = -a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Die Matrix $\boldsymbol{\rho}_A$, s. (26) ist für diesen Fall: $\left\{ \sum_\mu a_{j\mu} a^*_{k\mu} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

d.h. hat 2 Eigenwerte, damit ist der Zustand verschränkt.

Betrachten wir dagegen den Spin 1 Zustand mit $J_z = 1$ Spin:

$$|J = 1, J_z = 1\rangle = |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B = |00\rangle \tag{50}$$

so hat die Darstellung von vornherein nur einen Summanden ($N_{Sch} = 0$), er ist also nicht verschränkt.

Für den Spin $J = 1$ mit J_z-Kompnenete 0 erhalten wir

$a_{11} = a_{22} = 0;\ a_{12} = a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit die gleiche $\boldsymbol{\rho}_A$ Matrix wie bei $J = 0, J_Z = 0$

Der aus der Matrix $\boldsymbol{\rho}_A$ konstruierte purifizierte reine Zustand $\in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_A \otimes |\tilde{e}_1\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_A \otimes |\tilde{e}_2\rangle_B; \qquad \langle\tilde{e}_j|\tilde{e}_k\rangle_B = \delta_{jk}$

könnte also für die beiden $J_z = 0$ Zustände der gleiche sein.