Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

10. Übung zur Quantenmechanik

Besprechung der Präsenzaufgaben: **Fr., 19.6.2015**
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 23.6.2015**

P 36 Drehimpulsalgebra II (+ 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator mit dem Quadrat des Impulsoperators und mit dem Quadrat des Ortsoperators kommutiert, $[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{P}}^2] = 0$ und $[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{Q}}^2] = 0$.

(b) Berechnen Sie $\left(\mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2\right) Y_{lm}$.

S 37 Drehimpuls und Darstellung der Drehgruppe (6 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen in drei Dimensionen. Für eine Drehung $R \in SO(3)$ gilt $\det(R) = 1$ und $R^T R = \mathbf{1}$. Es bezeichne $R_{\vec{\omega}}$ mit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\vec{\omega}/\,|\vec{\omega}|$.

(a) Geben Sie die Matrix für eine Drehung um die x_3-Achse mit dem Drehwinkel α an.

Eine unitäre Darstellung D der Drehgruppe auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ der quantenmechanischen Zuständen $|\psi\rangle$ kann im Ortsraum definiert werden durch

$$D(R_{\vec{\omega}})\psi(\vec{x}) = \psi\left(R_{\vec{\omega}}^{-1}\vec{x}\right) \tag{1}$$

für $R_{\vec{\omega}} \in SO(3)$.

(b) Zeigen Sie die sog. Darstellungseigenschaft $D(R_{\vec{\omega}_1} \cdot R_{\vec{\omega}_2}) = D(R_{\vec{\omega}_1}) D(R_{\vec{\omega}_2})$.

(c) Man kann allgemein zeigen, dass $D(R_{\vec{\omega}}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{L}}\right)$,
d. h. die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind gerade die Generatoren der Drehungen auf den quantenmechanischen Zuständen. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang für den Fall einer Drehung um die x_3-Achse.
Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Funktionensystem.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $D(R_{\vec{\omega}})$ unitär ist.

S 38 Lenzscher Vektor (optional, + 6 Punkte)

Im klassischen Kepler-Problem gibt es eine Erhaltungsgröße, die als Lenzscher Vektor bekannt ist. Man kann ein quantenmechanisches Analogon $\vec{\mathbf{F}}$ zum Lenzschen Vektor definieren mit den Komponenten

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{2m}\sum_{k,l} \epsilon_{jkl}(\mathbf{P}_k\mathbf{L}_l - \mathbf{L}_k\mathbf{P}_l) - \frac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|}\mathbf{Q}_j\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Komponenten von $\vec{\mathbf{F}}$ mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ des Coulomb-Problems

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^{\,2}}{2m} - \frac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|} \tag{3}$$

kommutieren, $[\mathbf{F}_i, \mathbf{H}] = 0$.

S 39 Herleitung der Pauli-Matrizen (optional, + 5 Punkte)

Wir wollen die bekannte Form der Pauli-Matrizen für den Drehimpuls $j = 1/2$ aus den allgemeinen Eigenschaften des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{J}}$ herleiten. Wir betrachten die Zustände $|\phi_{jm}\rangle$, die Eigenzustände zu $\vec{\mathbf{J}}^2$ und $\mathbf{J}_3$ sind,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}^2 |\phi_{jm}\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |\phi_{jm}\rangle & (4) \\ \mathbf{J}_3 |\phi_{jm}\rangle &= m\hbar |\phi_{jm}\rangle \,. & (5) \end{aligned}$$

Für die Operatoren $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_+ |\phi_{jm}\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\; \hbar \; |\phi_{j,m+1}\rangle \,, & (6) \\ \mathbf{J}_- |\phi_{jm}\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\; \hbar \; |\phi_{j,m-1}\rangle \,. & (7) \end{aligned}$$

Für den Drehimpuls $j = 1/2$ kann m die Werte $-1/2$ und $+1/2$ annehmen. Wir identifizieren

$$\left|\phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left|\phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Für den Fall $j = 1/2$ schreibt man üblicherweise $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$. Leiten Sie aus den obigen Bedingungen (5)-(7) die explizite Darstellung der Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}_i$ her.

S 40 Sphärischer Potentialtopf (8 + 3 Punkte)

Wir wollen den dreidimensionalen sphärischen Potentialtopf unendlicher Tiefe untersuchen. Das Potential ist also mit $R > 0$

$$V(|\vec{x}|) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\vec{x}| < R \\ \infty & \text{für } R \le |\vec{x}| \,. \end{cases} \tag{9}$$

Wir wollen im Folgenden die Energieeigenwerte $E > 0$ und die zugehörige Eigenfunktionen bestimmen.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator für die Bewegung eines Teilchens der Masse m in diesem Potentialtopf an.

(b) Setzen Sie die Lösung im Ortsraum unter Verwendung von Kugelkoordinaten an als

$$\psi(r,\vartheta,\phi) = f_l(r)\, Y_{lm}(\vartheta,\phi)\,. \tag{10}$$

Es sei $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ und wir definieren die Variable $z = r/k$. Zeigen Sie, dass der obige Ansatz eine Lösung der Energieeigenwertgleichung ist, falls $g_l(z) = f_l(r/k)$ der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d}{dz} - \frac{l(l+1)}{z^2} + 1\right] g_l(z) = 0 \tag{11}$$

genügt. Diese Differentialgleichung ist als (sphärische) Besselsche Differentialgleichung bekannt. Ihre Lösungen sind die (sphärischen) Bessel-Funktionen $j_l(z)$ und die Neumann-Funktionen $n_l(z)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0(z) = \frac{\cos z}{z} \tag{12}$$

Lösungen der Differentialgleichung (11) für $l = 0$ sind.

(d) Zeigen Sie, dass j_0 im Ursprung regulär ist und dass n_0 im Ursprung nicht regulär ist. Warum muss die Lösung n_0 bei unserem Problem ausgeschlossen werden?

(e) Finden Sie die möglichen Energiewerte E für den Fall $l = 0$. Verwenden sie hierbei ausschließlich die Lösung j_0.

(f) (optional) (+ 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$j_1(z) = \frac{1}{z} j_0(z) - n_0(z) \qquad \text{und} \qquad n_1(z) = \frac{1}{z} n_0(z) + j_0(z) \tag{13}$$

die Differentialgleichung (11) für $l = 1$ lösen. Zeigen Sie, dass j_1 im Gegensatz zu n_1 regulär im Ursprung ist. Finden Sie für $l = 1$ eine Bedingung für die möglichen Energieeigenwerte.

S 41 Umlaufzahl und Polarwinkelform (6 Punkte)

Wir wollen im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \tag{14}$$

betrachten.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} \tag{15}$$

und $\vec{A} = \vec{\nabla} f(x, y)$ mit $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

(b) Man kann zeigen, dass für jede geschlossene Kurve C

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{ds} = 2\pi n \,, \tag{16}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl des Weges C um den Ursprung bezeichnet. Überprüfen Sie dies an Beispielen (etwa für geeignete Kreiswege).

Bemerkung: Wegen dieses Resultats wird $\theta = \vec{A} \cdot \vec{ds}$ als Polarwinkelform bezeichnet. In der nächsten Übung werden wir sehen, dass diese in der Quantenmechanik eine wichtige Anwendung beim Aharonov-Bohm-Effekt findet.