Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

Zusatzaufgaben zur Quantenmechanik

Z 1 Freier Propagator im Impulsraum

Aus dem Propagator im Ortsraum, $K(\vec{x}_1, t_1; \vec{x_0}, t_0)$, kann man durch Fouriertransformation den Propagator im Impulsraum gewinnen,

$$K(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) = \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1\right) K(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0\right) d^3x_0\, d^3x_1\,, \tag{1}$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang eines Teilchens vom Impuls $\vec{p}_0$ zur Zeit t_0 zum Impuls $\vec{p}_1$ zur Zeit t_1 beschreibt.

(a) Zeigen Sie, dass die Impulsraumdarstellung des freien Propagators

$$K_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_1 - t_0)}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{im(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right] \tag{2}$$

gegeben ist durch

$$K_0(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) = (2\pi\hbar)^3\, \theta(t_1 - t_0)\, \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1) \exp\left[\frac{-i\vec{p}_0^{\,2}(t_1 - t_0)}{2\hbar m}\right]. \tag{3}$$

Hinweis: Es ist günstig, eine Transformation zu neuen Koordinaten $\vec{x} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1$, $\vec{X} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, und $\vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1$, $\vec{P} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1$ durchzuführen.

Durch eine weitere Fouriertransformation bzgl. t erhält man den Propagator in Abhängigkeit von der Energie E,

$$K(\vec{p}_1, E_1; \vec{p}_0, E_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,E_1 t_1\right) K(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,E_0 t_0\right) dt_0\, dt_1\,, \tag{4}$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang von einem Impuls $\vec{p}_0$ und einer Energie E_0 zu einem Impuls $\vec{p}_1$ und einer Energie E_1 beschreibt.

(b) Berechnen Sie den freien Propagator in dieser Darstellung, d. h. $K_0(\vec{p}_1, E_1; \vec{p}_0, E_0)$.

Hinweis: Hierbei tritt ein Integral der Form $\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau$ auf, das für reelle ω nicht konvergiert. Ersetzen Sie hier $\omega \to \omega + i\epsilon$ mit $\epsilon > 0$, um Konvergenz zu erzeugen, und belassen Sie das ϵ im Ergebnis.

Z 2 Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\,, \tag{5}$$

worin $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass mit $r = |\vec{x}|$

$$G_\pm(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{6}$$

Greensche Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d. h.

$$(\Delta + k^2)\,G_\pm(\vec{x}) = \delta(\vec{x})\,. \tag{7}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Laplace-Operator Δ in sphärischen Polarkoordinaten.

Z 3 Streuamplitude in Bornscher Näherung

In Bornscher Näherung ist die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ für die Streuung am Potential $V(\vec{x})$ gegeben durch

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,V(\vec{q})\,, \tag{8}$$

worin $V(\vec{q})$ die Fouriertransformierte des Potentials $V(\vec{x})$ ist,

$$V(\vec{q}) = \int d^3x\,V(\vec{x})\,e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,. \tag{9}$$

Dabei ist $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ der Streuwellenvektor, d. h. die Differenz zwischen den Wellenvektoren des auslaufenden und des einlaufenden Teilchens.

(a) Zeigen Sie, dass für kugelsymmetrische Potentiale, also für $V(\vec{x}) = V(r)$ mit $q = |\vec{q}|$ gilt

$$V(\vec{q}) = V(q) = \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty dr\,V(r)\,r\sin(qr)\,. \tag{10}$$

(b) Berechnen Sie $V(q)$ für
(i) das Yukawa-Potential

$$V(r) = A\,\frac{e^{-r/\mu}}{r}\,, \tag{11}$$

(ii) das Gauß-Potential

$$V(r) = A\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)\,, \tag{12}$$

(iii) für das Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,. \tag{13}$$

Z 4 Streuung am Coulomb-Potential

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Coulomb-Potential in Bornscher Näherung gemäß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \,. \tag{14}$$

Benutzen Sie dazu das Ergebnis von Aufg. 3 (b) (i),

$$V(q) = 4\pi A \, \frac{1}{q^2 + \frac{1}{\mu^2}} \,, \tag{15}$$

und nehmen Sie einen geeigneten Grenzwert des Yukawa-Potentials. Verwenden Sie außerdem $|\vec{k}_f| = |\vec{k}_i| = k$ und $q = 2k \sin(\theta/2)$ (warum?). Woher kennen Sie das Resultat bereits?

Z 5 Strukturanalyse mittels Streuung

Wir betrachten die Streuung von Teilchen an einem zweiatomigen Molekül, dessen Potential gegeben sei durch

$$V(\vec{x}) = F(\vec{x} + \vec{a}) + F(\vec{x} - \vec{a}) \,, \tag{16}$$

worin F das Potential eines Atoms ist. Das Molekül sei entlang der x-Achse orientiert. Die Streuteilchen sollen entlang der z-Achse einlaufen. Der Streuwinkel θ sei wie üblich als Polarwinkel zur z-Achse definiert. Der Azimuthalwinkel φ sei so definiert, dass die positive x-Achse $\varphi = 0$ habe.

(a) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung.
Hinweis: Das Ergebnis können Sie durch die Fouriertransformierte von F ausdrücken. Wie hängt $(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \vec{a}$ von θ und φ ab?

(b) Ein Experimentator benutzt Neutronen der Energie $E = 1\,\mathrm{eV}$ als Streuteilchen und beobachtet die erste Nullstelle des Wirkungsquerschnitts für $\varphi = 0$ bei $\theta = 4°$. Wie groß ist der Abstand $2a$ der beiden Atome im Molekül?
Hinweis: $\hbar c = 197\,\mathrm{MeV\,fm}$, und die Neutronmasse ist $m_n c^2 = 938\,\mathrm{MeV}$.

Bemerkung: Man kann obiges Potential für die Streuung an einem Kristallgitter verallgemeinern und in ähnlicher Weise den Gitterabstand des Kristalls bestimmen.

Z 6 Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

Die Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts enthält wichtige und experimentell leicht zugängliche Informationen über das Potential. Im folgenden wollen wir diese Winkelabhängigkeit genauer betrachten.

(a) Skizzieren Sie die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts vom Streuwinkel θ für den Fall

  (i) einer reinen s-Wellenstreuung,

  (ii) einer reinen p-Wellenstreuung,

  (iii) der Interferenz einer s-Wellen- und einer p-Wellenstreuung.

Hinweis: Hierbei können Sie die Koeffizienten der jeweiligen Terme in der Partialwellenzerlegung der Streuamplitude beliebig wählen.

(b) Skizzieren Sie die Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts in Bornscher Näherung für zwei verschiedene Werte von ka, z. B. $ka = 10$ und $ka = 0.1$ für

   (i) das Kastenpotential,

   (ii) das Yukawa-Potential,

   deren Streuamplituden in Aufg. 3 berechnet wurden. (Dort war statt a im Yukawa-Potential die Bezeichnung μ verwendet worden.)
   Hinweis: Sie können hierbei natürlich Ihren Computer um Hilfe bitten.

Z 7 Niederenergiestreuung an einer harten Kugel

Wir betrachten die Streuung von Teilchen am Potential einer harten Kugel,

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < R_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{17}$$

bei niedriger Energie, $kR_0 \ll 1$, so dass nur die s-Welle zur Streuung beiträgt. Setzen Sie die Streulösung in der Form $\psi(\vec{x}) = r^{-1}u_{k,l}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ an und geben Sie die radiale Gleichung für die Funktion $u_{k,0}(r)$ an. Finden Sie mit Hilfe der Randbedingung bei $r = R_0$ die Lösung dieser Gleichung und lesen Sie daran die Streuphase δ_0 ab. Bestimmen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt und vergleichen Sie ihn mit dem Resultat, das Sie in der klassischen Mechanik für diesen Prozess erwarten würden.