Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst

Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

Lösungshinweise zu den optionalen Aufgaben zur Quantenmechanik

S 9 Kommutatoralgebra

(a) Die gesuchten Eigenschaften folgen direkt durch Ausschreiben des Kommutators und geeignetes Gruppieren der Terme.

(b) $n = 0$ trivial. Für den Induktionsschritt verwendet man die Resultate aus (a) sowie die Induktionsannahme.

(c) Zeigen Sie erst, dass

$$e^{\lambda \mathbf{A}} \mathbf{B} = (\mathbf{B} + \lambda[\mathbf{A}, \mathbf{B}])\, e^{\lambda \mathbf{A}}\,.$$

Dazu benutzt man die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, den Zusammenhang $\mathbf{A}^n \mathbf{B} = [\mathbf{A}^n, \mathbf{B}] + \mathbf{B}\mathbf{A}^n$ sowie die in (b) gezeigten Relationen. Dann einfaches Anwenden der Produktregel (beachten Sie die Reihenfolge!), verwenden Sie die obige Relation und $e^{\lambda \mathbf{A}}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = [\mathbf{B}, \mathbf{A}]e^{\lambda \mathbf{A}}$. Integration und Vergleich mit der Definition von $F(\lambda)$ lieferen den gesuchten Zusammenhang.

S 27 Angeregte Zustände des 1-dim. harmonischen Oszillators

Verwenden Sie die Operatoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\dagger$ und $\mathbf{N}$ aus Aufg. 19.
Der Fall $n = 0$ gilt laut Vorlesung. Induktionsschritt laut Hinweis: nehmen Sie an, $|\psi_n\rangle$ mit $\mathbf{N}\,|\psi_n\rangle = n\,|\psi_n\rangle$ sei eindeutig. Starten Sie beim Induktionsschritt mit einer Menge von Eigenzuständen $|\psi^i_{n+1}\rangle$ des Operators $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $n+1$. Durch sukzessive Anwendung der Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^\dagger$ können Sie dann finden, dass die Zustände $|\psi^i_{n+1}\rangle$ mit verschiedenen i zueinander proportional sein müssen, woraus sich die Eindeutigkeit des angeregten Zustands $|\psi_{n+1}\rangle$ ableiten lässt.

S 29 Kohärenter Zustand im harmonischen Oszillator II

(c) Drücken Sie die Quadrate $\mathbf{Q}^2$ und $\mathbf{P}^2$ sowie $\mathbf{H}$ über die Leiteroperatoren $\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger$ aus. Die entsprechenden Erwartungswerte sind dann wie in (b) zu berechnen. Man findet

$$\begin{aligned}
(\Delta\mathbf{Q})_c^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,, && (1)\\
(\Delta\mathbf{P})_c^2 &= \frac{m\omega\hbar}{2}\,, && (2)\\
(\Delta\mathbf{Q})_c(\Delta\mathbf{P})_c &= \frac{\hbar}{2} \quad \text{(minimal!)}\,, && (3)\\
(\Delta\mathbf{H})_c^2 &= \hbar^2\omega^2|c|^2\,. && (4)
\end{aligned}$$

(d) Verwenden Sie die Reihendarstellung für $|\phi_c\rangle$ wie angegeben, um das Produkt $\langle\phi_c\,|\phi_{c'}\rangle$ zu berechnen.

Die beiden Zustände haben verschiedene Eigenwerte bzgl. $\mathbf{A}$, aber $\mathbf{A}$ ist nicht selbstadjungiert, daher ist ein nicht-verschwindendes Skalarprodukt möglich.

(f) Wir haben oben gezeigt, dass das Schwankungsprodukt für alle c gleich $\frac{\hbar}{2}$ ist, also insbesondere auch für $c = c_0 e^{-i\omega t}$.

S 30 Ritzsches Variationsverfahren

(c) Analog zu (b). Um die Absolutbeträge korrekt zu behandeln, schränken Sie die Integrationsgrenzen entsprechend ein. Leiten Sie $E[\psi]$ nach λ ab, um das Minimum zu bestimmen. Nur die Lösung mit $\lambda > 0$ ist physikalisch sinnvoll. Wir finden $\lambda_{\min} = \frac{1+\sqrt{6}}{2} = 1.7247$ und damit $E_{\min}[\psi] = \frac{5+2\sqrt{6}}{\pi^2} E_0 = 1.002976 \cdot E_0$.

S 31 Anharmonischer Oszillator

(b) Der volle Hamiltonoperator lautet $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{W} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2 x^2$ mit $\tilde{\omega}^2 = \omega^2(1+\epsilon)$ und damit gilt

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega\sqrt{1+\epsilon} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \left[1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} \dots\right]. \tag{5}$$

Drücken Sie nun $\mathbf{W}$ über die Leiteroperatoren aus. Die Matrixelemente können dann direkt berechnet werden

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n \,|\mathbf{W}\psi_n\rangle &= \frac{1}{2}\,\epsilon\,\hbar\,\omega\,(n + \frac{1}{4}) && \text{1. Ordnung}\,, && (6)\\
\langle \psi_{n+2} \,|\mathbf{W}\psi_n\rangle &= \frac{1}{4}\,\epsilon\,\hbar\,\omega\,\sqrt{(n+1)(n+2)} && \text{2. Ordnung}\,, && (7)\\
\langle \psi_{n-2} \,|\mathbf{W}\psi_n\rangle &= \frac{1}{4}\,\epsilon\,\hbar\,\omega\,\sqrt{n(n-1)} && \text{2. Ordnung}\,. && (8)
\end{aligned}$$

Einsetzen in den Ausdruck für die Energie liefert die Terme der Reihe (5).

S 33 Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten

- Benutzung der Kettenregel gemäß dem Hinweis. Die Rechnung ist langwierig, aber im Prinzip einfach.
- Ein eleganterer Beweis bedient sich des Gaußschen Satzes. Dieser Weg ist z. B. in K. Jänich, "Analysis für Physiker und Ingenieure", Springer Verlag, Kap. XI, §2, zu finden.

S 35 WKB-Näherung

(e) Linearisieren Sie $V(x) \simeq E + V'(x-a)$ laut Hinweis und setzen Sie dies in den Ausdruck für $\frac{\hbar}{p}$ ein. Dann dies in Bed. (12) einsetzen und so umformen, dass λ darin wieder identifiziert werden kann. Elementare Umformung führt zum Ergebnis.

(g) Die Umkehrpunkte $x_n = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ folgen direkt aus ihrer Definition $E = V(x)$ mit dem Potential für den harmonischen Oszillator. Im Integral Gl. (22) ersetzt man $\frac{m\omega^2}{2E}x^2 \to \xi^2$, was ein Integral über einen Halbkreis liefert. Damit findet man tatsächlich die exakte Lösung für E_n für alle n.

S 38 Lenzscher Vektor

Elementares Kommutieren führt zum gesuchten Resultat. Ein etwas eleganterer Weg basiert auf der Herleitung und Verwendung folgender Relationen

$$
\begin{aligned}
[\vec{\mathbf{P}}^2, \vec{\mathbf{L}}] &= 0\,, && (9)\\
\left[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{F}}\right] &= -\frac{1}{2m}\left[\vec{\mathbf{P}}^2, \frac{\vec{\mathbf{Q}}}{r}\right] - \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r}, \vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{P}}\right]\,, && (10)\\
\vec{\mathbf{P}}^2 &= \frac{\hbar^2}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{\vec{\mathbf{L}}^2}{r^2}\,, && (11)\\
\left[\partial_r, \frac{\vec{\mathbf{Q}}}{r}\right] &= 0\,, && (12)\\
\left[\vec{\mathbf{P}}^2, \frac{\vec{\mathbf{Q}}}{r}\right] &= \frac{1}{r^3}\left[\vec{\mathbf{L}}^2, \vec{\mathbf{Q}}\right] = \frac{i\hbar}{r^3}\left(\vec{\mathbf{Q}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{Q}}\right)\,, && (13)\\
\left[\frac{1}{r}, \vec{\mathbf{P}}\right] \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \left[\frac{1}{r}, \vec{\mathbf{P}}\right] &= -\frac{i\hbar}{r^3}\left(\vec{\mathbf{Q}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{Q}}\right)\,. && (14)
\end{aligned}
$$

S 39 Herleitung der Pauli-Matrizen

Untersuchen Sie die Wirkung von $\mathbf{S}_3$ auf die Basisvektoren. Daraus kann man eine Darstellung für σ_3 ablesen. Außerdem definiert man $\mathbf{S}_\pm = \mathbf{S}_1 \pm i\mathbf{S}_2$ und untersucht ebenso ihre Wirkung auf die Basiszustände. Aus der resultierenden Darstellung für $\sigma_\pm$ kann die Darstellung für $\sigma_{1,2}$ rekonstruiert werden.

S 40 Sphärischer Potentialtopf

(f) Elementares Ableiten führt zur Erkenntnis, dass die Differentialgleichung in der Tat erfüllt wird. Man findet weiter, dass der Limes $z \to 0$ von n_1 divergiert. j_1 kann für kleines z in eine Taylorreihe entwickelt werden und man findet den Grenzwert $j_1 \to 0$ für $z \to 0$.

Die Bedingung für die Energie lautet $f_1(R) = j_1(kR) = 0$, also $\tan(kR) = kR$ mit $k = \frac{2mE}{\hbar^2}$, was numerisch gelöst werden kann.