Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, E. Thommes — Sommersemester 2010

4. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 11.05.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 06./07.05.2010

P 12 Spinalgebra und Dichteoperator (5 Punkte)

Die Komponenten des Spinoperators eines Zwei-Zustand-Systems sind definiert als $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}_i$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_i$ die Pauli-Matrizen sind (siehe Aufg. 11). Der Dichteoperator für ein solches System ist

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{3} P_i\boldsymbol{\sigma}_i\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) $\det\boldsymbol{\sigma}_j = -1$ und $\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}_i = 0$,

(b) $\boldsymbol{\sigma}_i^2 = \mathbf{1}$, $\{\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l\} = 2\delta_{kl}$ und $[\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l] = 2i\varepsilon_{klm}\boldsymbol{\sigma}_m$,

(c) $\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm}\boldsymbol{\sigma}_m$, und damit $(\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{a})(\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$,

(d) $\langle\mathbf{S}_i\rangle = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\rho}\mathbf{S}_i) = \hbar P_i\,.$

S 13 Spinalgebra im Produktraum (5 Punkte)

Wir betrachten ein System aus 2 Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Der Zustandsraum dieses Systems ist der Produktraum der Hilberträume der einzelnen Teilchen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$. Der Operator des Gesamtspins ist $\vec{\boldsymbol{\Sigma}}$, seine Komponenten sind

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{S}_i\,. \tag{2}$$

Wir bezeichnen die beiden Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens mit $|+\rangle$ und $|-\rangle$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_3|+\rangle = |+\rangle$ und $\boldsymbol{\sigma}_3|-\rangle = -|-\rangle$. Zeigen Sie, daß

$$\vec{\boldsymbol{\Sigma}}^2 = \vec{\mathbf{S}}^2\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\vec{\mathbf{S}}^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\mathbf{S}_i\otimes\mathbf{S}_i\,. \tag{3}$$

Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren $\boldsymbol{\Sigma}_3$ und $\vec{\boldsymbol{\Sigma}}^2$ auf folgende Zustände:

(a) $|+\rangle\otimes|+\rangle$

(b) $|-\rangle\otimes|-\rangle$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|-\rangle + |-\rangle\otimes|+\rangle\right)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|-\rangle - |-\rangle\otimes|+\rangle\right)\,.$

S 14 Translationsoperator (5 Punkte)

(a) **Im abstrakten Hilbertraum**
Der Translationsoperator ist für $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ definiert als

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{\mathbf{P}}\right)\,, \tag{4}$$

wobei $\mathbf{P}$ der Impulsoperator ist. Zeigen Sie, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ unitär ist und daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_1\mathbf{P}_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_2\mathbf{P}_2\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_3\mathbf{P}_3\right)\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie außerdem, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ die Darstellungseigenschaft besitzt, d. h. daß für $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\mathbf{T}_{\vec{b}} = \mathbf{T}_{\vec{a}+\vec{b}}\,. \tag{6}$$

(b) **Im Ortsraum**
Im Ortsraum sind die Komponenten des Impulsoperators $\mathbf{P}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$. Sei $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ unendlich oft differenzierbar. Zeigen Sie daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{a})\,. \tag{7}$$

S 15 Kontinuitätsgleichung (5 Punkte)

Wir betrachten die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = \mathbf{H}\left|\psi\right\rangle \tag{8}$$

im Ortsraum. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\,, \tag{9}$$

wobei wir annehmen, daß das Potential V reellwertig sei. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion $\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$ kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Es sei

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie durch Kombination der Schrödingergleichung mit ihrer komplex konjugierten, daß ρ und $\vec{J}$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \tag{11}$$

erfüllen. Welche Interpretation hat demzufolge $\vec{J}$? Zeigen Sie weiter, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit $\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\vec{x},t)d^3x$ zeitlich konstant ist.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm10.html